COMENTARIO DE CARLOS VASCO A MI INVESTIGACIÓN SOBRE MATEMÁTICAS POPULARES

Cambradge, MA, agosto 18/85

Dr. Germán Mariño
c/o Dimensión Educativa
Calle 41 #13-41
Bogotá, D.E.

Mí estimado Germán:

Con mucho cuidado y mucho entusiasmo he revisado los libritos que me regalaste sobre tu investigación. Se nota el afecto por la gente popular, lo bien que te mueves en su ambiente, y la sagacidad para "pescar" lo que están pensando. Me llama mucho la atención tu capacidad para imaginarte cosas nuevas sin dejarte amarrar por lo trillado y lo convencional. Hay muchas cosas que pueden servir mucho a los alumnos de las escuelas, así no sean adultos, y veo muchas coincidencias con los programas que hemos ido desarrollando en el ministerio. Celia me escribe que se han seguido viendo y que están trabajando en equipo con mucha coordinación, lo que me parece muy fructífero para el grupo del ministerio y para el de Dimensión Educativa.

En ese espíritu de colaboración y de admiración por tu trabajo se deben entender las observaciones que siguen. El mejor tributo que le podemos hacer a un trabajo científico serio es revisarlo críticamente, aunque nuestra incipiente comunidad científica colombiana todavía crea que toda crítica al trabajo es una ofensa personal... Toda revisión crítica está por supuesto orientada mas a encontrar dificultades que a ver lo bueno, y por eso parece sesgada hacia lo negativo; pero esta tan bueno tu trabajo que muchas veces no me pude contener de escribir alguna nota con muchas admiraciones!!!

Aquí en Harvard la vida es muy distinta a la que los trópicos. Cuando hace calor, es como Barranquilla, pero aun en este verano hay días muy frescos y agradables. Las bibliotecas son maravillosas, y uno encuentra las referencias que necesita sin mucho trabajo. La gente muy amable, aunque la burocracia es la misma en todas partes, y la antigua y pesada Universidad de Harvard no es precisamente una excepción. Voy a estar trabajando en mi proyecto de sabático para la Universidad Nacional, que es una especie de informe sobre la concepción de las matemáticas que está detrás de los nuevos programas de matemáticas del ministerio de educación, y de las implicaciones pedagógicas que esa concepción acarrea en cada tema.

Simultáneamente estaré dirigiendo un seminario sobre lo que voy escribiendo, de tal manera que la “carga académica” que son dos sesiones a la semana, no sea una carga, sino una ayuda para ir escribiendo, consultando, y, como suelen hacer los profesores, aprovechando la actividad de los estudiantes para conseguir bibliografía, darle una primera discusión a los manuscritos, etc.

Espero que todo vaya bien por esas tierras colombianas, y te deseo muchos éxitos.

Un abrazo de

CARLOS

¿COMO OPERA MATEMÁTICAMENTE EL ADULTO DEL SECTOR POPULAR?

p.7 1.3 Base 10: mejor en letras: base diez, pues todas las bases se escriben con un uno y un cero.

p.7 1.8 Tal vez en la Costa Atlántica sea así, pero en Antioquia “una mano de plátanos” no son cinco... Depende del racimo, pero siempre son mucho más de cinco. Claro que en Antioquia tampoco se dice “una mano de plátanos” sino “una manu'e plátanus”...

Me llama la atención este punto, pues en el Depto. de Antropología de la Nacional hicimos una recogida de sistemas de numeración entre los indígenas colombianos y encontramos muchas huellas de sistemas quinarios y bi-quinarios. (El bi-quinario cuenta así: uno, dos, dos y uno, dos y dos, una mano, mano y uno, mano y dos, mano y dos y uno, mano y dos y dos, dos manos).

Me parece que está demasiado elaborado y pesado el agrupamiento de unidades. Si en realidad se observó así en el trabajo de campo, es bueno anotar expresamente el asunto, con alguna indicación de lugar y fecha. Claro que este no es el informe completo para COLCIENCIAS, pero me parece que tampoco es de pura divulgación como para omitir estas indicaciones que muestran que la cosa no es inventada. Además, puede que otras personas hayan observado otras cosas en otros lugares cercanos, y en el futuro otras personas harán observaciones que se pueden contrastar con las que hay aquí, que son muy valiosas, pero quedan perdidas para la tarea social y cooperativa de seguir-haciendo-ciencia nuestra.

p.9 1.1 ¿Tal vez el cuarterón sea un cuarto de tarea?¿'Tal vez se escriba y se pronuncie “cabuya” en vez de “cabulla”? Sería bueno revisar esto.

p.10 1.1-3 No entiendo esta observación; parece contradecir lo del tejo, y además coincide con la numeración importada de Europa. Tampoco me parece acertada la observación sobre los Mayas: la numeración en base veinte (mejor que 20) sí tiene que ver con la suma de los dedos de las manos y los pies, como puede verse en grabados antiguos con los indígenas en cuclillas con las manos puestas junto *a* los pies. El hecho de que para pasar del segundo al tercer lugar de la numeración se usara el 360 en vez del 400 no es ningún argumento contra la suma de los dedos de las manos y los pies, pues solo entra después de 359, cantidad a la que la mayoría de los Mayas tal vez nunca tuviera que llegar en sus cuentas. Es solo una explicación de por qué se cambia de base al pasar a la tercera cifra del sistema maya. Yo más bien diría que la división del año en 18x20 tiene que ver con la suma de los dedos de los pies y las manos, y la coincidencia con los 360 días del año lunar: 12x30.

p.10 1.5 hacia arriba: Es mejor decir “longitud, área y volumen”, y dejar “línea, superficie y cuerpo” para los objetos abstractos que tienen longitud, área o volumen (magnitudes).

p.11 1.12 ¿En cuáles lugares de los Llanos Orientales? ¡Decirlo!

pp.16-17 Muy interesante estudiar en detalle este diálogo, y otros semejantes, en los que se encuentren “errores”. Por ejemplo en el caso de 25 más 58, el resultado 78 es una "atracción" muy común que hace olvidar el cinco por bajarse al número redondo anterior (70).

p.18 1.1 Este aparte empieza sin saberse por qué. ¿Cómo suma quien? Al pasar el título a la p.13 y poner el diálogo en la mitad, se olvida el título y se pierde el sujeto de la frase. Además, muy entre nos, no creo que haya ningún adulto del sector popular que haga eso tan complicado para sumar ocho y cuatro doce. La docena es muy natural! Tal vez para catorce y nueve, o algo así.

Tal vez es mejor no poner la X, sino: 8 + ? = 10. Aun eso lo pensaría antes de escribirlo, pues el mismo signo "=" es poco intuitivo. Tal vez es mejor escribir: 8 y ? da 10.

Hay que subrayar la importancia de la búsqueda de los complementos a cinco y a diez, aunque la palabra "complemento" puede ser inapropiada.

Tal vez mejor decir “faltante” (y en vez de “residuo” puede ser mejor decir "sobrante").

p.21 1.5-11 No me gusta la oposición “popular”-“culto”, pues da la impresión de que lo popular es inculto!

En esta misma página se habla de los decimales. Mi impresión es que para los adultos populares (y los no adultos también, populares o no) los centavos no son decimales, sino que la pareja pesos-centavos es una pareja de “números complejos”, como .horas-minutos, libras-onzas, etc.

Claro que se puede usar para motivar los decimales, pero no hay que dejarse llevar de las apariencias de la coma o punto “decimal”. (De todas maneras, la pareja pesos-centavos es un espécimen en vías de desaparición...) Pero mi observación va a que la afirmación que hace el autor sobre los “decimales que tienen un equivalente monetario” no está bien fundada teóricamente, y es una típica ilusión empirista. Por eso sobra la diatriba sobre "los programadores", además de que hay una confusión en el párrafo entre el caso de los niños y el de los adultos.

También sería bueno matizar la polémica sobre lo simple y lo complejo.

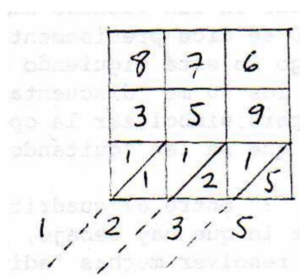
Tanto la afirmación de que hay que partir de lo simple a lo complejo como la contraria, de que es mejor partir de lo complejo, se quedan en llamamientos vacíos de contenido. La teoría de sistemas (desde el siglo pasado la de la “Gestalt”?) permite hacer afirmaciones operacionales para los casos particulares. El caso general se podría enunciar tentativamente de alguna manera parecida a esta:

“Del sistema familiar y sencillo pero relativamente complejo,
a los componentes-con-sentido,
y de ellos de nuevo al sistema complejo”.

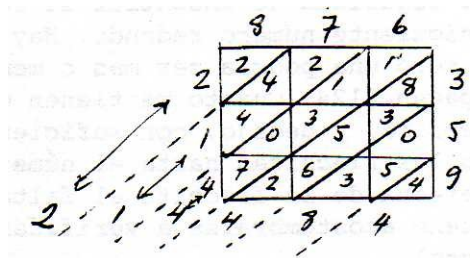
Nótese que lo familiar y sencillo, lo cotidiano, suele ser bastante complejo; por lo tanto no hay contradicción entre los términos. Lo “simple” son los componentes; pero al aislarlos sin conservar su sentido dentro del sistema, el conductismo y la Tecnología Educativa derivada del, rompieron las tareas en unidades "simples" pero sin sentido. Si se piensa un poco en estas ideas, se puede ver en qué sentido es necesario y muy útil hacer análisis de tareas, así se rasguen las vestiduras los críticos de la Tecnología Educativa, y a que deformación del análisis de tareas se dirigen justificadamente sus criticas.

p.22 1) y 2) ¿Repiten lo de la p.10?

p.22 4) Esto es de lo más interesante en el trabajo! Como hablamos en Bogotá, se parece mucho al sistema que aparece en los manuscritos latinos de los S. XIII y XIV como los métodos de "enrejados", "rejillas" o "celosías", con la diferencia de la orientación de los toboganes o resbaladeros: en los manuscritos aparecen las rayas de arriba a la derecha hacia abajo y a la izquierda:



Así se pone la decena, que es "más grande" que las unidades, en la esquina de arriba del cuadrito, y al sumar, se resbala hacia la izquierda para no cambiar mucho de posición las cifras. En el álgebra medieval se utilizaba la rejilla o celosía para la multiplicación:



p.27 1.1 Esta gradación "en bajada": "se - muy poquito -no sé nada", es muy típica de la auto-descalificación del adulto popular al conversar con la gente "letriada"; no se le debe hacer caso a esta modestia! De la confianza en sí mismo que trae saber-ya-algo es de donde debe partir el proceso pedagógico. Muchas veces, a pesar de lo que diga la persona, ese saber-ya-algo es saber-ya-mucho!

La mención de los palitos amerita un seguimiento a ver qué hace la persona con los palitos y como los maneja. (Los palitos ya habían aparecido en la p.2). La utilización de piedritas ("cálculos") o fichas es muy importante tanto desde el punto de vista histórico, como desde el punto de vista del desarrollo infantil; en las tiendas habría que estudiar cómo se utilizan las tapas de cerveza y gaseosa para llevar cuentas.

p. 29 1.6 De nuevo la negación de lo que sí saben, como en la p.27. Pero no fallan en las vueltas... Lo que pasa es que ellos no restan sino que van subiendo, como se explica en las páginas siguientes. Si estuvieron uno o dos anos en la escuela y les hablaron de la resta, lo más probable es que lo único que aprendieron de ella fue a tenerle miedo. Por eso dicen que no saben restar. Pero es claro que al buscar el faltante para el siguiente número redondo, están restando (esa es la definición de la resta como operación inversa, confundiendo el resultado o resta con la operación o sustracción), y lo hacen muy bien!

p.30 1.8 De nuevo recomiendo escribir: 27 y ? da 30 o también: De 27 a 30 faltan?

Nótese que esta es la resta "por la izquierda" que aparece en algebra abstracta cuando la operación no es conmutativa; la que aparece en los textos es la resta “por la derecha” que es menos natural, aunque también podría leerse: Para llegar a 30 desde 27 faltan?

En realidad, para las vueltas en las tiendas ambas expresiones son naturales: en la misma p.30 se dice precisamente que con el billete de $50 se debe pagar $27, luego se está siguiendo el orden usual de la resta “por la derecha”: De los 50 me “discuentan” 27 y me quedan?

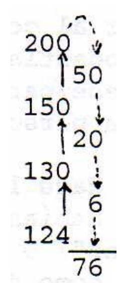
Ciertamente la rayita "-" para simbolizar la operación binaria de restar es poco intuitiva, a menos que se lea "quitándole": 50 - 27 (cincuenta, quitándole 27 ...)

p.31 1.9 Recomiendo poner "?" entre el cuadrito, o utilizar el cuadrito como una tapa para adivinar lo que hay debajo, no tanto para escribir adentro; aunque después de resolver muchas "adivinancias" ya se puede empezar a escribir la respuesta dentro del cuadrito.

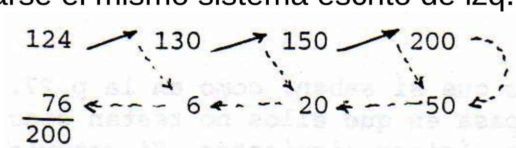
En la línea 10 creo que falta un signo + entre el 130 y el cuadrito.
Sobre la notación para la resta, no me acaba de gustar está ni la de la cartilla. Propongo que se estudie la idea de "subir" hasta el siguiente numero redondo, pues imaginativamente eso es lo que se hace; así se prepara la notación usual de la resta, que de todas maneras es bueno aprender cuando ya se tiene seguridad de encontrar el resultado correcto por el método de subir al siguiente numero redondo. Hay que estudiar y ensayar varias notaciones, pero una podría ser más o menos así:

Con un billete de $200 se pagan $124. Cuanto me tienen que devolver?

Se escribe primero el 200 arriba, y debajo, con suficiente espacio, el 124; se empieza a subir con las flechitas hasta el número redondo siguiente, poniendo a la derecha de la flechita el faltante; luego se suman los faltantes. (Es bueno acostumbrarse a verificar si la operación da el faltante total correcto):



También puede ensayarse el mismo sistema escrito de izq. a der.:



Así se guarda la posición de las cifras, se lee fácilmente, y se prepara la verificación al final.

(Las flechitas punteadas son para dirigir la mirada, pero no hace falta pintarlas. Lo mismo las puntas de las flechas: es para ver en qué sentido se trazan, pero no hace falta pintarlas).

Estudiando un método de hacer divisiones que usaban en la edad media, y que se llama “por galeras”, se me ocurrió una notación que puede ensayarse para la resta. A la izquierda voy poniendo lo que se escribe y a la derecha lo que se va diciendo: supongamos de nuevo que quiero saber cuánto va de 124 a 200; escribo 124 y 200:

124
200

Ahora digo, leyendo el primer dígito de la izquierda:

De cien (tacho el uno) a doscientos, van cien (escribo el 100 y tacho el 200):

124
200
100

Leyendo el segundo dígito digo: de veinte (tacho el 2) a cien, van ochenta (escribo el 80 y tacho el 100):

124
200
100
80

Leyendo el ultimo dígito digo: de cuatro (tacho el 4) a ochenta, van setenta y seis (escribo el 76 y tacho el 80):

124
200
100
80
76

Cuando todos los dígitos del primer número están tachados, la respuesta debe estar abajo.

El método de galeras como se usaba antes permite no tener que volver a escribir todo el numero, sino ir leyendo el número como en escalera, escribiendo sólo el uno del cien y tachando sólo la primera cifra del 200:

124
200
1

Se lee el cien subiendo del uno a los dos ceros que están sin tachar. Luego se tacha el dos de arriba, se escribe el 80, y se tacha el uno y el cero. El 80 se lee en escalera hacia arriba:

124
200
18

Pero eso es cuando uno ya tiene mucha práctica. Al principio es mejor escribir todo el número y tachar todo el de arriba. Cuando el número grande

es múltiplo de 100 o de 1000, la cosa se facilita mucho. En general no es tan sencillo.
De todas maneras se divierte uno mucho!

p.35 1. 15 Muy valioso el conteo de dos en dos, de tres en tres, etc.
Es el “operador +n”, que no solo es muy importante, sino que al repetirlo produce las tablas de multiplicar, y no de manera aburrida, sino muy interesante. Uno puede oír a los “pelados” en la casa contando de cinco en cinco, de diez en diez, etc. por puro entretenimiento.
Además, ese es el verdadero “número entero positivo” como operador.

p.37 Muy importante este hallazgo empírico de la duplicación. Es un método que siempre sirve, pues cualquier número puede ser expandido en numeración binaria. Ya los egipcios lo habían descubierto, y era su manera de multiplicar. El otro aspecto importante en esta página es el de la habilidad de estimar con números cercanos o redondos, y la capacidad de notar inmediatamente si el total que van encontrando está por encima o por debajo del resultado buscado. Esta habilidad de estimación es clave como objetivo general en cualquier programa para adultos o para cualquier clase de personas.

p.39 Me gusta mucho la idea de un primer nivel de acuerdo con las necesidades de la persona. Esa descomposición me gusta. Puede evitarse toda la primera parte, aprendiendo a escribir de una vez los números descompuestos en columna:

100
50
2.

Me parece un buen ejercicio para... preparar la adición, la sustracción, la multiplicación, y debe repetirse con frecuencia aun en el programa para la básica primaria.

Claro que la línea 17 está mal, pues 100x528 = 52 800 (y no 5 280), y la línea siguiente también está mal, pues da 26 400, y el total es bastante más grande que 8 976: 80 256.

Aquí viene muy bien la estimación del total antes de empezar: 500x100 daría 50000, y 500x200 daría 100 000, luego el resultado debe estar entre cincuenta y cien mil.

El procedimiento propuesto está muy bueno; tan bueno, que si se hace de arriba para abajo, prepara inmediatamente el procedimiento usual:

152:	2	x	528 =	1 056
	50	x	528 =	26 400
	100	x	528 =	52 800
				80 256.

Si uno se fija bien, esos son los subtotales y el total de la multiplicación usual de 528 por 152:

```
      528
    x 152
   ______
     1056
    2640
    528
   ______
    80256
```

Así no se gasta tiempo “des-aprendiendo” el primer método para pasar al usual, sino que se utiliza para preparar el usual y para que se vea que se pueden escribir todos los ceros si uno quiere, y después para ahorrar tiempo se omiten los ceros del segundo y tercer subtotal.

También se podría introducir el método egipcio de doblar y sacar mitades, y el método de las celosías.